

PAOLO BORTOT | UMBERTO MAGNANI | GENNARO OLIVIERI
FRANCESCO A. ROSSI | MARCELLO TORRIGIANI

MATEMATICA FINANZIARIA

*SECONDA EDIZIONE
CON ESERCIZI*

MONDUZZI **E**EDITORIALE

Prefazione

Negli ultimi decenni la Matematica Finanziaria si è sviluppata e ramificata in numerosi settori specialistici, collegandosi e intersecandosi con altre discipline delle aree economica, aziendale e quantitativa. Le connessioni con l'Economia Politica e Aziendale, la Tecnica Bancaria, la Finanza Aziendale, la Statistica, l'Econometria e la Teoria dell'Ottimizzazione, hanno acquisito via via maggior rilievo nell'analisi e nell'utilizzo di metodi descrittivi, normativi, risolutivi nella gestione di sistemi decisionali, venendo così a caratterizzare ampi settori della ricerca e della didattica.

Gli autori sono convinti che la Matematica Finanziaria deve, anziché chiudersi in sé stessa coltivando solo i tradizionali argomenti, cercare di battere la strada dell'integrazione multidisciplinare, in particolare proponendo la modellistica dei fatti attinenti la Finanza. Finanza che si sta velocemente modificando grazie alla diffusione degli strumenti informatici, delle informazioni e alla globalizzazione dei mercati.

Lo spettro delle competenze necessarie per tentare di interpretare ed analizzare le tendenze della nostra disciplina a ramificarsi ed integrarsi con altre, era davvero troppo ampio per potersi trovare presso un singolo autore. E questo volume è, infatti, il prodotto dell'impegno congiunto, si potrebbe dire della "scommessa", di cinque autori (uno in più rispetto alla prima edizione). In questo ordine di idee la novità di maggior rilievo in questa seconda edizione consiste nella discussione di un nuovo tema, quello della selezione del portafoglio.

Il lavoro è concepito e impostato congiuntamente, ma ogni parte è stata sviluppata dai singoli autori in modo autonomo:

G. Olivieri: capitoli 1 e 2,

U. Magnani: capitoli 3, 4, 5, 6, 7, 8,

M. Torrigiani: capitolo 9,

P. Bortot: capitoli 10, 11, 12,

F. A. Rossi: capitolo 13.

La scelta degli argomenti e dei loro contenuti specifici è stata oggetto di discussioni e differenze di opinione, non sempre giunte ad una completa composizione finale. A ciò si aggiungano le difficoltà derivanti dalla scarsa omogeneità nei programmi dei corsi di Matematica Finanziaria presso le nostre Facoltà, così come

quelle riguardanti i pre-requisiti tecnici e culturali richiesti agli Studenti dei nostri corsi. Tutto ciò ha condotto, ad avviso degli autori, a qualche carenza di integrazione fra le varie parti, che speriamo possa essere eliminata con l'aiuto e la critica dei Colleghi che condividono le opinioni e lo spirito della "scommessa". In questo senso l'attuale edizione, che vede, rispetto alla prima, molte modifiche, tagli e l'introduzione di un nuovo argomento, può considerarsi quale "edizione uno" ed ogni suggerimento o proposta che i Lettori vorranno far pervenire agli Autori sarà benvenuta, come preziosa indicazione ed aiuto per migliorare il presente manuale, nell'interesse degli Studenti delle Facoltà di Economia, ai quali è diretto e dedicato.

Nel testo sono stati ricompresi tutti quegli argomenti che più si impongono e meglio si giustificano per il loro rilievo sul piano pratico-professionale classico (leggi di capitalizzazione, rendite, operazioni standard come gli ammortamenti di prestiti e leasing), per la loro valenza interdisciplinare (valutazione e scelta dei progetti di investimento), per l'apporto nella individuazione della soluzione ottima (teoria e tecniche di ottimizzazione statica), per il contributo alla pianificazione e controllo delle decisioni in condizioni di rischio (la moderna teoria della selezione del portafoglio).

L'esclusione di alcuni argomenti, pur importanti, e la decisione di non approfondirne altri sono state motivate da vincoli di carattere pratico che hanno imposto scelte non facili, certamente criticabili. Ad esempio, è stata quasi completamente trascurato l'apporto del Calcolo Numerico e si potrebbe ampliare quanto attiene all'immunizzazione, per esempio introducendo l'Asset/Liability Management. Nelle edizioni future si cercherà di rimediare alle carenze ed esclusioni oggi presenti, mettendo a frutto anche i suggerimenti che perverranno e dei quali gli autori desiderano ringraziare in anticipo.

Nel capitolo 1 sono trattati i problemi fondamentali relativi agli scambi di posizioni finanziarie, ponendo l'accento, più che sugli aspetti meramente tecnici, sulla formazione delle differenti opportunità, arbitraggi, in un ambiente che operi secondo precise ipotesi di base sulla perfezione del mercato e sulle aspettative degli operatori.

Il capitolo 2 è dedicato alle operazioni finanziarie composte e segue l'impostazione di quello precedente.

I capitoli 3, 4, 5 analizzano le tradizionali operazioni di costituzione di capitale e di ammortamento di un prestito, indiviso o diviso. Pur restando nell'ambito di una impostazione piuttosto standard, sono stati curati i collegamenti con gli aspetti giuridico, economico-aziendale, tecnico-bancario e contabile-fiscale delle operazioni.

I capitoli 6, 7 e 8 discutono i problemi di valutazione e scelta di progetti economico-finanziari. Dopo aver introdotto il contesto e le ipotesi di lavoro, si presenta un'analisi critica dei criteri di scelta più comuni, oramai standard nell'Economia d'azienda e che spesso sono presentati come "strumenti toccasana". Si formula quindi uno schema integrato per la gestione ottimale dei progetti che appare più flessibile, cioè più robusto dal punto di vista metodologico e più aperto alle varianti ed agli innesti suggeriti da esigenze di realismo.

Nel capitolo 9 viene trattata un'operazione di particolare rilievo applicativo per gli aspetti economico-aziendali e finanziari coinvolti: il leasing. L'esposizione è

dedicata essenzialmente all'analisi dei problemi di natura quantitativa, anche decisionali, che tale operazione pone nella gestione dell'azienda, sia dal punto di vista dell'Istituto finanziario che da quello dell'impresa utilizzatrice, ponendo in evidenza collegamenti e sviluppi di argomenti svolti nei capitoli precedenti e aspetti interdisciplinari essenzialmente relativi all'Economia Aziendale.

I capitoli 10, 11 e 12 presentano una rassegna di strumenti matematici per impostare, analizzare e risolvere diversi problemi di ottimo, ricchi di risvolti finanziari di rilievo. Lo scopo principale consiste nel portare gradualmente il Lettore, dotato del bagaglio medio di conoscenze matematiche di uno Studente universitario, dai classici problemi di estremo libero per funzioni di più variabili, a problemi più sofisticati ed interessanti di estremo condizionato, per i quali solo negli ultimi decenni si sono resi disponibili algoritmi risolutivi efficienti. In particolare, la programmazione lineare, quella a numeri interi e la non lineare, strumenti già collaudati con ampio successo, mostrano interessanti possibilità di utilizzo per la razionalizzazione delle scelte finanziarie.

Nel capitolo 13 si presenta la moderna Teoria della Selezione del Portafoglio, introducendo lo Studente alla conoscenza e alla trattazione (almeno nel caso uniperiodale) del rendimento atteso e del rischio delle possibilità d'investimento, al fine di fornirgli uno strumento logico di supporto alle decisioni in presenza di rendimenti aleatori. Si utilizzano elementari e basilari concetti del Calcolo delle Probabilità e della Statistica (valore atteso e varianza, questa assunta a misura del rischio) per costruire un criterio (E-V) e modelli analitici la cui soluzione è già stata studiata nei capitoli precedenti dedicati alla programmazione matematica. Poiché il criterio E-V seleziona fra i portafogli fattibili quelli economicamente sensati, efficienti, ma non individua quello ottimo, a necessario completamento del processo decisionale viene presentata la Teoria dell'Utilità Attesa, la cui proposta è utilizzata per individuare, fra quelle efficienti, la scelta ottima, preferita.

Tali modelli, già da tempo presenti in letteratura per la selezione ottimale di possibilità di investimento finanziario, vengono qui proposti anche per il controllo del rendimento-rischio di un'impresa, vista come portafoglio di prodotti.

Infine, si discutono i modelli più conosciuti per la valutazione dell'equilibrio dei mercati finanziari: il Capital Asset Pricing Model (CAPM) e l'Arbitrage Pricing Theory (APT), che sono stati proposti come naturale conseguenza, sotto opportune ipotesi, dell'analisi e della modellistica già introdotte con la moderna Teoria della Selezione del Portafoglio.

Alcuni Colleghi e Collaboratori hanno letto i manoscritti, segnalato correzioni, formulato proposte. A tutti quanti gli Autori esprimono i loro ringraziamenti di vero cuore, in forma anonima e collettiva. Ricordarli singolarmente potrebbe portare a spiacevoli errori di omissione ma, soprattutto, potrebbe essere interpretato quale "chiamata in correità" per carenze e scelte delle quali solo gli autori sono responsabili.

Un'ultima osservazione riguardo alla copertina, il cui aspetto è abbastanza inusuale per la presenza di un serpente col corpo sinuoso e munito di due teste, una delle quali trattiene denaro e l'altra partorisce simboli matematici. L'animale si alimenta di denaro, cioè di fenomeni finanziari, e li metabolizza, cioè li analizza e

costruisce teorie, produce modelli formali astratti. Questo messaggio è abbastanza chiaro, mentre per il resto è utile qualche spiegazione. La Matematica Finanziaria usa abitualmente simboli, manipola segni in un contesto che, ai non addetti ai lavori, può anche apparire poco trasparente, misterioso. In ciò sta l'analogia col serpente, che ha sempre avuto, in ogni cultura, significati simbolici e misteriosi, persino taumaturgici. Infine, la posizione tormentata del serpente vuole semplicemente rappresentare il "parto", tortuoso e sofferto, ad opera dei cinque autori.

Questi ultimi desiderano, infine, ringraziare l'Editore, che per primo ha creduto nella "scommessa" menzionata ed ha seguito con intelligenza la preparazione e stesura del presente volume.

Indice

Prefazione	Pag.	v
----------------------	------	---

Capitolo 1 - *Leggi e Regimi Finanziari*

1.1 - Oggetto della Matematica Finanziaria	”	1
1.2 - Operazioni finanziarie	”	2
1.3 - Il mercato dei capitali	”	5
1.4 - Altre funzioni finanziarie	”	8
1.5 - Struttura dei prezzi (o dei valori) dei mercati di capitali	”	13
1.6 - Il caso di due periodi	”	21
1.7 - La struttura del mercato in funzione dei tassi di interesse	”	26
1.8 - Regime finanziario della capitalizzazione composta	”	37
1.9 - Tassi equivalenti	”	42
1.10 - Tassi nominali	”	50
1.11 - La forza di interesse	”	59
1.12 - La forza d'interesse per le leggi finanziarie a due o tre variabili	”	65
1.13 - Rendimento a scadenza	”	71
1.14 - Scindibilità e uniformità delle leggi finanziarie	”	73
1.15 - Principio dell'equilibrio finanziario ed equità delle operazioni finanziarie	”	76
1.16 - Esame della scindibilità mediante la forza d'interesse	”	77
1.17 - Regime finanziario dell'interesse semplice	”	81
1.18 - Regime finanziario dello sconto commerciale	”	86
1.19 - Conclusioni	”	90

Capitolo 2 - *Operazioni finanziarie composte*

2.1 - Introduzione	”	97
2.2 - Concetti di base	”	97
2.3 - Valore attuale di una rendita	”	102
2.4 - Montante di una rendita o costituzione di un capitale	”	112
2.5 - Classificazione delle rendite	”	116

2.6 - Valori attuali di rendite temporanee discrete	Pag. 118
2.7 - Montanti di rendite temporanee non continue	” 130
2.8 - Valori attuali e montanti di rendite temporanee non continue nei casi particolari di rate costanti o variabili secondo determinate leggi - Formule compatte	” 131
2.9 - Valori di rendite perpetue costanti	” 137
2.10 - Valori attuali e montanti di rendite continue	” 140
2.11 - Cenni sulle rendite negli altri regimi finanziari	” 142
2.12 - Problemi relativi alle rendite costanti: ricerca del valore attuale, della rata e del numero delle rate	” 143
2.13 - Problemi relativi alle rendite costanti: ricerca del tasso di interesse	” 146
2.14 - Indici temporali e indici di variabilità	” 151

Capitolo 3 - Costituzione di un capitale

3.1 - Premessa	” 171
3.1.1 - Valore retrospettivo e prospettivo	” 172
3.1.2 - Valutazioni con leggi scindibili	” 173
3.1.3 - L'aggiornamento del valore retrospettivo	” 175
3.2 - Costituzione di un capitale	” 176
3.2.1 - Lo schema generale dell'operazione	” 176
3.2.2 - Il fondo di costituzione	” 177
3.2.3 - La nozione di capitale investito	” 180
3.2.4 - Qualche variante	” 180
3.2.5 - Problemi tipici	” 182

Capitolo 4 - Prestiti indivisi

4.1 - Il contratto di mutuo	” 187
4.2 - L'approccio elementare	” 188
4.3 - L'approccio finanziario	” 192
4.4 - La riconciliazione tra i due approcci	” 196
4.5 - Risvolti contabili	” 198
4.6 - Piano di ammortamento	” 198
4.7 - Un quadro delle relazioni tipiche	” 199
4.8 - Metodi di ammortamento	” 202
4.8.1 - Rimborso unico finale di capitale ed interessi	” 202
4.8.2 - Rimborso unico finale del capitale e periodico degli interessi	” 202
4.8.3 - Metodo francese (rate costanti)	” 203
4.8.4 - Metodo italiano (quote capitale costanti)	” 204
4.8.5 - Metodo americano, o a due tassi	” 204
4.8.6 - Parentesi su alcuni metodi poco seri	” 206
4.8.7 - Metodo tedesco (o degli interessi anticipati)	” 207
4.9 - Qualche complemento	” 211
4.9.1 - Il tasso interno di costo	” 211

4.9.2 - Valore del prestito, Nuda proprietà, Usufrutto	Pag. 212
--	----------

Capitolo 5 - *Prestiti divisi*

5.1 - Introduzione	” 217
5.2 - Prestiti obbligazionari	” 218
5.2.1 - Alcune technicalities	” 218
5.2.2 - L’ammortamento dei prestiti obbligazionari	” 222
5.2.3 - Valore, nuda proprietà, usufrutto	” 225
5.2.4 - Qualche esercizio	” 228
5.2.5 - Una scorciatoia per trovare la struttura dei tassi a termine	” 236

Capitolo 6 - *Progetti economico-finanziari*

6.1 - Introduzione	” 241
6.2 - Formalizzazione dei progetti	” 242
6.2.1 - Il vettore dei segni	” 245
6.2.2 - Avvertenza	” 245
6.2.3 - I vettori dei costi e dei ricavi	” 246
6.2.4 - Indicatori di un progetto	” 246
6.3 - Un’algebra dei progetti	” 248
6.4 - I vettori dei saldi	” 250
6.4.1 - Il vettore dei saldi a tasso nullo	” 250
6.4.2 - Il vettore dei saldi al tasso i	” 251
6.4.3 - Il vettore dei saldi ai tassi $(x; y)$	” 251
6.4.4 - Il vettore dei saldi a tassi variabili	” 252
6.4.5 - La decomposizione dei saldi	” 252
6.4.6 - I progetti puri	” 254
6.5 - Criteri di scelta tra progetti – Proprietà generali	” 257
6.5.1 - Ipotesi generali	” 257
6.5.2 - Definizione di un criterio di scelta	” 258
6.5.3 - Proprietà minimali di un criterio	” 259
6.5.4 - Proprietà addizionali	” 262
6.6 - Qualificazione dei progetti	” 263
6.6.1 - Premessa	” 263
6.6.2 - Proposte di qualificazione	” 265
6.7 - Completezza delle alternative – I progetti integrativi	” 269

Capitolo 7 - *Criteri di valutazione standard*

7.1 - Il criterio del valore attuale (REA)	” 275
7.1.1 - Definizione e proprietà formali	” 275
7.1.2 - Criteri del REA e del montante finale	” 277
7.1.3 - L’ipotesi di simmetria dei tassi	” 282
7.1.4 - Monotonia del REA e del montante rispetto ad i	” 285

7.1.5 - I problemi di capital rationing	Pag. 289
7.2 - Il criterio TRM	” 296
7.2.1 - Introduzione	” 296
7.2.2 - Proprietà formali	” 298
7.2.3 - Il criterio del valore attuale a due tassi	” 300
7.2.4 - Un 3o tasso	” 301
7.3 - Il criterio del tasso interno	” 302
7.3.1 - Introduzione	” 302
7.3.2 - La classe di progetti dotati di tasso interno	” 305
7.3.3 - I progetti dei Lutz	” 307
7.3.4 - I progetti di Soper	” 308
7.3.5 - I progetti di De Faro	” 311
7.3.6 - Altre classi di progetti	” 312
7.3.7 - Tasso interno e REA	” 313
7.3.8 - Il tasso interno come criterio daltonico	” 317
7.3.9 - La leva finanziaria	” 318
7.3.10 - La leva finanziaria pluri-periodale	” 320
7.3.11 - Leggi finanziarie interne e leva finanziaria	” 325
7.3.12 - La decomposizione del REA	” 327
7.3.13 - L'efficienza marginale del capitale	” 330
7.4 - Varianti e altri criteri	” 331
7.4.1 - Il criterio del pay-back	” 331
7.4.2 - Il criterio del rapporto benefici/costi	” 333
7.4.3 - Il criterio del risultato medio	” 334
7.4.4 - Il criterio del rendimento del primo anno	” 334
7.4.5 - Il criterio di Arps (o del TRAM)	” 334
7.4.6 - I criteri del terzo tasso	” 336
7.4.7 - Varie	” 336
 Capitolo 8 - Il modello vespa	
8.1 - Introduzione	” 337
8.2 - Uno schema “passe-partout”	” 340
8.3 - Qualche esercizio	” 343
8.4 - Un problema lineare	” 347
8.5 - Un problema duale	” 351
8.5.1 - Leva finanziaria e Terra della Cuccagna	” 351
8.5.2 - Una legge finanziaria interna	” 353
8.5.3 - Capitale out-standing (e in-standing)	” 354
8.5.4 - What if?	” 355
8.6 - La scatola del <i>Meccano</i>	” 356
8.6.1 - Sulla strada del realismo	” 356
8.6.2 - Schema VESPA e altri criteri	” 357

8.6.3 - Capital rationing (dopo il naufragio)	Pag. 357
8.6.4 - Capitale intermedio e utili periodali	" 358

Capitolo 9 - *Il Leasing*

9.1 - Profili generali	" 361
9.2 - Il leasing dal punto di vista dell'Istituto finanziario	" 367
9.2.1 - Determinazione dei canoni	" 367
9.2.2 - Indicizzazione del canone	" 370
9.2.3 - Durata ottima del contratto	" 370
9.2.4 - La decisione Lease-or-sell	" 372
9.2.5 - La redditività del contratto di leasing	" 374
9.3 - Analisi quantitativa dal punto di vista dell'azienda utilizzatrice	" 381
9.3.1 - L'alternativa leasing-indebitamento – il problema	" 382
9.3.2 - L'indebitamento sostituito dal leasing	" 383
9.3.3 - Analisi dell'alternativa leasing-indebitamento	" 393
9.3.4 - Durata ottima del contratto	" 394

Capitolo 10 - *Strumenti analitici per le decisioni e le scelte finanziarie*

10.1 - Definizioni preliminari. Convessità	" 395
10.2 - Estremi vincolati, con vincoli di uguaglianza	" 397
10.3 - Problemi con vincoli di disuguaglianza: la programmazione non lineare	" 400
10.3.1 - Introduzione e nozioni preliminari	" 400
10.3.2 - Programmazione matematica non lineare.	" 401
10.4 - Teoremi di Kuhn-Tucker nel caso non convesso	" 403

Capitolo 11 - *Problemi con vincoli di disuguaglianza. Caso lineare*

11.1 - Introduzione	" 405
11.2 - Un problema di programmazione lineare	" 406
11.3 - Un problema LP in forma matriciale. Soluzioni di base	" 408
11.4 - Proprietà delle soluzioni ottime di un problema LP	" 411
11.5 - Analisi delle soluzioni di base. Fondamenti del metodo del simplesso	" 412
11.6 - Analisi delle soluzioni di base. Il metodo del simplesso	" 413
11.7 - Un esempio didattico	" 417
11.8 - Dualità	" 421
11.9 - Problemi duali. Teoremi	" 422
11.10 - Programmazione lineare intera	" 427
11.11 - Problemi di programmazione lineare a struttura particolare	" 431

Capitolo 12 - *Cenni su possibili applicazioni elementari della programmazione matematica alla scelta fra progetti di investimento*

12.1 - Un problema di scelta monoperiodo (Lorie-Savage)	" 435
12.2 - Una generalizzazione multiperiodo del problema di Lorie-Savage	" 436

Capitolo 13 - La moderna teoria della selezione del portafoglio

13.1 - Introduzione	Pag. 439
13.2 - Rendimento e rischio di un'attività	" 440
13.2.1 - Rendimento di un titolo	" 440
13.2.2 - Rendimento di un prodotto o business	" 441
13.2.3 - Rendimento atteso e rischio di un titolo o business	" 442
13.2.4 - Confronto fra più titoli o business	" 444
13.3 - Analisi di un portafoglio composto da due titoli o business	" 447
13.3.1 - Introduzione	" 447
13.3.2 - Analisi dei portafogli possibili nel caso di due titoli	" 448
13.3.3 - Selezione dei portafogli efficienti (frontiera efficiente) nel caso	" 455
13.3.4 - L'introduzione nel portafoglio di un titolo a rendimento certo	" 462
13.4 - Analisi di portafoglio con n titoli o business	" 465
13.4.1 - Rendimento e rischio di portafogli fattibili	" 465
13.4.2 - Analisi del rischio del portafoglio all'aumentare del numero di	" 466
13.4.3 - La selezione dei portafogli efficienti ovvero la valutazione	" 471
13.4.4 - Il modello parametrico	" 480
13.5 - Analisi del portafoglio in presenza di titoli o business a rendimento aleatorio, investimenti e finanziamenti a tasso certo	" 484
13.5.1 - Portafogli efficienti (frontiera efficiente) nel caso di $n - 1$ titoli o	" 485
13.5.2 - Alcune simulazioni	" 487
13.5.3 - Portafogli efficienti (frontiera efficiente) utilizzando sia titoli o business a rendimento aleatorio sia un titolo a rendimento certo sia la possibilità di indebitamento a tasso certo	" 488
13.6 - ROI, ROE e sostenibilità dei debiti	" 492
13.6.1 - Valore atteso e varianza di ROI e ROE	" 492
13.6.2 - Ipotesi di indebitamento a tasso certo e di rendimento aleatorio	" 493
13.7 - Modelli semplificati di selezione del portafoglio: il modello diagonale di Sharpe	" 501
13.7.1 - Il modello diagonale di Sharpe	" 501
13.8 - Modelli semplificati di selezione del portafoglio. Modelli a più indici	" 507
13.8.1 - Modelli a più indici	" 507
13.9 - La scelta preferita	" 522
13.9.1 - Introduzione	" 522
13.9.2 - La teoria dell'utilità attesa	" 523
13.9.3 - Valutazione della funzione di utilità	" 531
13.9.4 - Individuazione del portafoglio a rendimento aleatorio preferito	" 536
13.10 - Modelli di equilibrio	" 542
13.10.1 - Equilibrio di mercato	" 542
13.10.2 - Il Capital Asset Pricing Model (C.A.P.M.)	" 542
13.10.3 - La Security Market Line (S.M.L.)	" 544
13.10.4 - L'Arbitrage Pricing Theory (A.P.T.)	" 548

<i>Testi di utile consultazione</i>	Pag. 555
Esercizi relativi ai capitoli 1, 2	” 561
Esercizi relativi ai capitoli 3, 4, 5, 6, 7, 8	” 593
Esercizi relativi al capitolo 9	” 631
Complementi ai capitoli 10, 11 e 12	” 669
Esercizi relativi al capitolo 13	” 687
<i>Indice analitico</i>	” 723